DOMINIO Y RECORRIDO DE FUNCIONES

Conceptos básicos

Función: una función entre dos conjuntos numéricos es una correspondencia tal que no hay ningún número que tenga más de una imagen.

Dominio de una función o campo de existencia: es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen. Los valores que le damos a x (variable independiente) forman el conjunto original. Gráficamente lo miramos en el eje OX de abscisas, leyendo como escribimos de izquierda a derecha.

Recorrido o rango de una función: es el conjunto formado por las imágenes. Son los valores que toma la función "y" variable dependiente, por eso se denomina f(x), su valor depende del valor que le demos a "x". Gráficamente lo miramos en el eje OY de ordenadas, leyendo de abajo a arriba.

Cálculo del dominio y recorrido de funciones

Vamos a calcular de forma numérica y gráfica el dominio y recorrido (conjunto imagen) de funciones polinómicas, racionales, irracionales y logarítmicas.

Dominio y recorrido de funciones polinómicas

Dominio

El dominio de una función polinómica son todos los números reales. Se expresa como:

Dom f(x)= $\Re$.

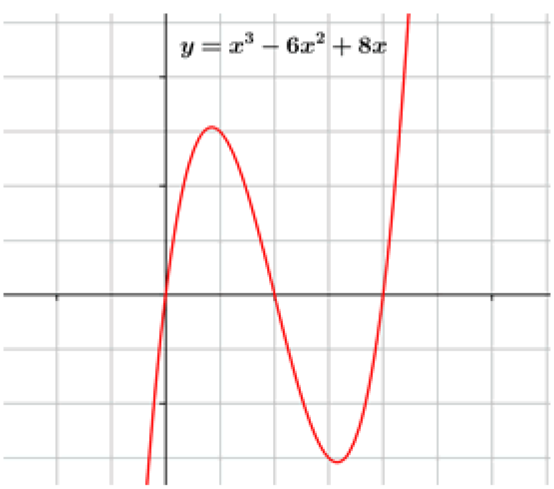
No tenemos que calcular nada.

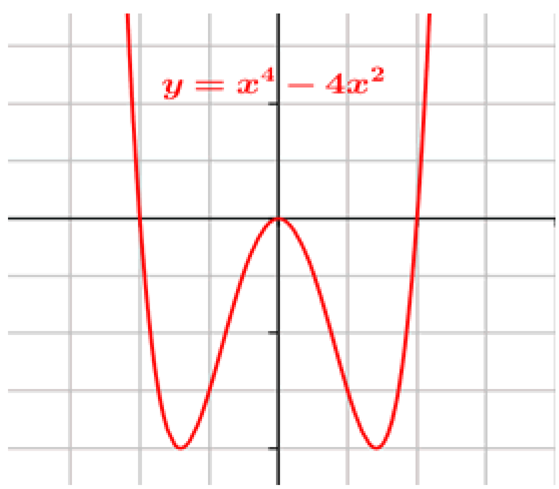
La función existe desde x = - ∞ hasta x = + ∞.

El dominio también se puede expresar así: **Dom f(x)= (- ∞, + ∞)**

Son funciones polinómicas las rectas, las funciones cuadráticas (parábolas) y las funciones polinómicas de grado superior

Ejemplos





$y = x^3 - 6x^2 + 8x$

Dom f(x) = $\mathbb{R}$, podemos leer valores de la función para cualquier valor de x.

Recorrido = $\mathbb{R}$, seguimos el eje OY de abajo hacia arriba y podemos leer valores siempre.

$y = x^4 - 4x^2$

Dom f(x) = $\mathbb{R}$

Recorrido: $[-4, +\infty)$ sólo podemos leer función desde y = - 4 hacia arriba.

Dominio y recorrido de funciones racionales

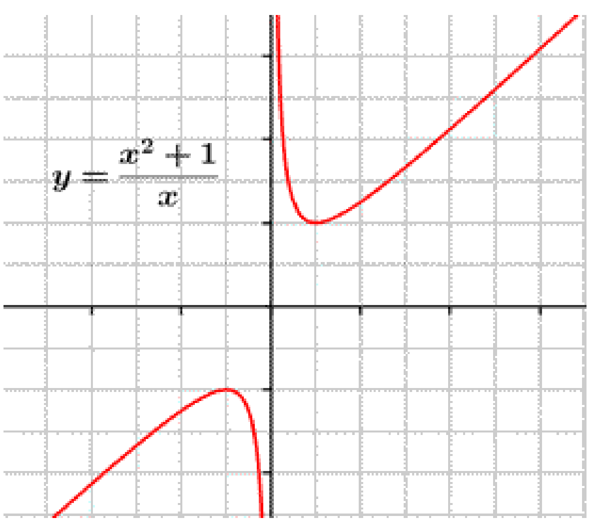
Dominio

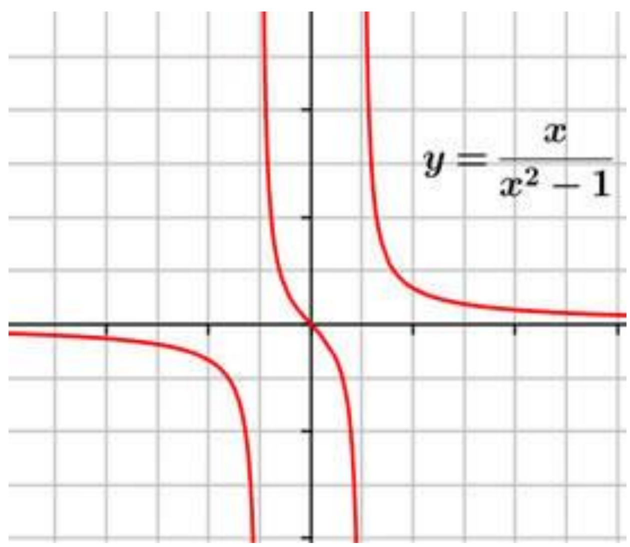
El dominio de una función racional son todos los valores de x, excepto aquellos que me anulan el denominador.

Se expresa así: **Dom f(x) = $\Re$ - {valores que me anulan el denominador, separados por comas}**

Para calcular el dominio, igualamos el denominador a cero y resolvemos la ecuación resultante. Si la ecuación se anula para algún valor, el dominio de la función son todos los números reales menos esos valores. Si la ecuación no tiene solución el dominio son todos los números reales.

Ejemplos





$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

Dominio: $x = 0 \Rightarrow$ Dom f(x) = $\mathbb{R} - \{0\}$. Observamos que podemos leer función en el eje OX para cualquier valor de x menos en x = 0

Recorrido: Leemos en el eje OY desde $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Dominio: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$. Podemos leer función para cualquier valor de x excepto en $x = \pm 1$.

Recorrido: todo $\mathbb{R}$

Dominio y recorrido de funciones irracionales

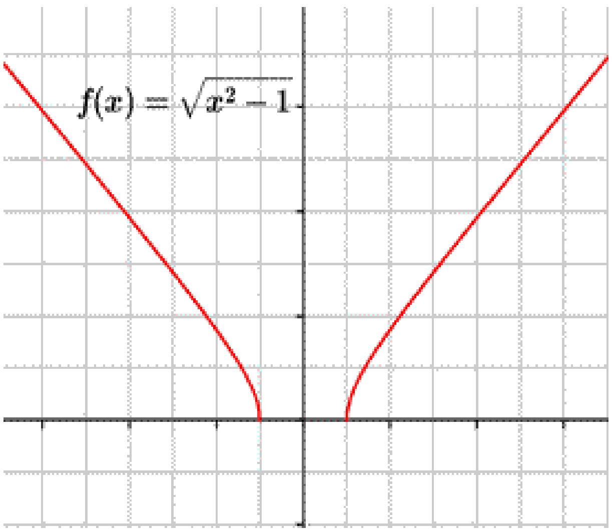
Dominio

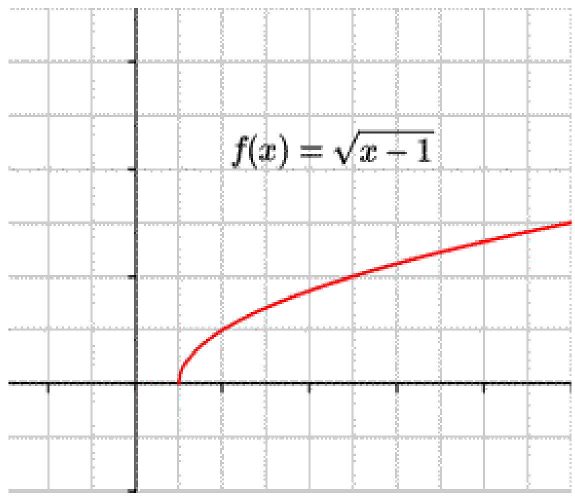
El dominio depende del índice de la raiz.

Índice impar: Don f(x) = $\Re$

Índice par: $\sqrt{P(x)} \Rightarrow P(x) \geq 0 \Rightarrow$ radicando ≥ 0

Ejemplos





$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Dominio: $x^2 - 1 \geq 0$ resolvemos la inecuación. $(x+1)(x-1) \geq 0 \quad \Rightarrow$ Dom $f(x) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Las soluciones son las zonas de la gráfica donde se cumple la inecuación, podemos leer desde $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Recorrido: podemos leer desde $y = 0$. Recorrido o imagen = $\mathbb{R}^+$ también como $[0, \infty)$

$f(x) = \sqrt{x - 1}$

Dominio: $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \quad \Rightarrow$ Dom $f(x) = [1, \infty)$. Podemos leer desde 1 hasta infinito.

Recorrido: $(0, \infty)$

Dominio y recorrido de funciones logarítmicas

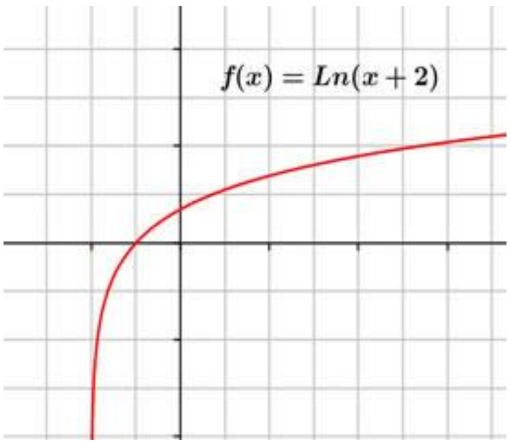
Dominio

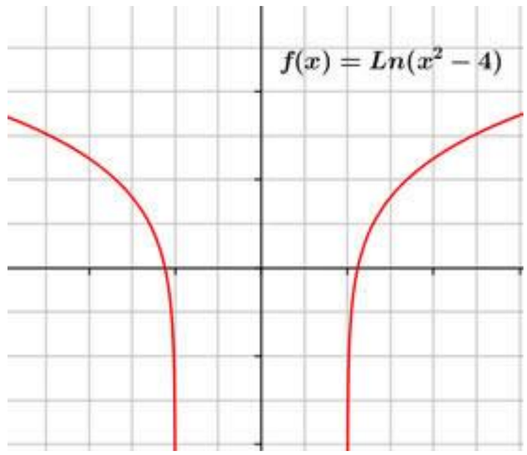
El valor del logaritmo debe ser > 0.

No existen los logaritmos de los números negativos ni el de cero.

Se resuelven igual que las irracionales pero en vez de usar ≥ 0 usaremos > 0

Ejemplos





$f(x) = L(x+2)$

Dominio: $x + 2 > 0 \quad \Rightarrow x > -2 \quad \Rightarrow$ Dom $f(x) = (-2, \infty)$. Podemos leer desde $(-2, \infty)$

Recorrido: $\mathbb{R}$

$f(x) = L(x^2 - 4)$

Dominio: $x^2 - 4 > 0 \quad \Rightarrow (x+2)(x-2) > 0 \quad \Rightarrow$ Dom $f(x) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Podemos leer desde $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

Recorrido: $\mathbb{R}$

Ejercicios resueltos de dominios

Calcular los dominios de las siguientes funciones:

1. $\mathbf{f(x) = \frac{x}{x - 1}} \quad \Rightarrow x - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = 1 \quad \Rightarrow \quad$ Dominio f(x): $\mathbb{R} - \{1\}$

2. $\mathbf{f(x) = \frac{2}{x^2 + 2x + 1}} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow x = -1 \quad \Rightarrow$ Dominio f(x): $\mathbb{R} - \{-1\}$

3. $\mathbf{f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}} \quad \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow x^2 = -1 \ \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$ sin solución. $\Rightarrow$ Dominio f(x): $\mathbb{R}$

4. $\mathbf{f(x) = \sqrt{x + 1}} \quad \Rightarrow x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq -1 \quad \Rightarrow \quad$ Dominio f(x): $[-1, \infty)$

5. $\mathbf{f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}} \quad \Rightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0 \ \Rightarrow (x - 2)(x - 4) \geq 0 \ \Rightarrow$ Dominio f(x): $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$

6. $\mathbf{f(x) = \log\ x^2 - 6x + 8} \Rightarrow x^2 - 6x + 8 > 0 \quad \Rightarrow (x - 2)(x - 4) > 0 \ \Rightarrow$ Dominio f(x): $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

   *** El 2 y el 4 no los incluimos, el logaritmo daría 0 y no existe.

7. $\mathbf{f(x) = \log (x + 1)} \quad \Rightarrow x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -1 \quad \Rightarrow$ Dominio f(x) = $(-1, \infty)$

   *** El -1 no lo incluimos, el logaritmo daría 0 y no existe.

8. $\mathbf{f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}} \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{Denominador irracional, el dominio sería desde } [1, \infty) \\ \text{Como también es racional para } x = 1 \text{ no existe } \Rightarrow \mathbf{Dom\ f(x) = (1, \infty)} \end{cases}$

9. $\mathbf{f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}} \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{Denominador irracional, el dominio sería } (-\infty, -2] \cup [2, \infty) \\ \text{Para } x = \pm 2 \text{ la función } \nexists \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Dom\ f(x) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)} \end{cases}$

10. $\mathbf{f(x) = \sqrt{\frac{x + 3}{x - 2}}} \quad \Rightarrow \frac{x + 3}{x - 2} \geq 0$

    Resolvemos la inecuación $\Rightarrow$ tiene sentido para: $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$

    Como es racional para $x = 2\ \nexists \ \Rightarrow$ $\mathbf{Dom\ f(x) = (-\infty, -3] \cup (2, \infty)}$

Disponible: http://www.vadenumeros.es/primero/dominio-y-recorrido-de-funciones.htm